1 Zahlenmengen

EINLEITUNG

Die Zusammenfassung von bestimmten, unterscheidbaren Zahlen zu einer Menge nennt man Zahlenmenge. Die einzelnen Zahlenmengen lassen sich durch verschiedene Eigenschaften beschreiben. Sie werden mit einem Großbuchstaben, der einen Doppelstrich enthält, abgekürzt.

Natürliche Zahlen

Die Menge der natürlichen Zahlen enthält die beim Zählen verwendeten Zahlen 1,2,3,4,5, usw. und wird mit dem Formelzeichen $\mathbb{N}$ abgekürzt. Die 0 gehört je nach Definition dazu.

$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11....\}$

Eine Fußballmannschaft besteht aus 11 Spielern. Solche Zahlen nennt man natürliche Zahlen.

Ganze Zahlen

Die Menge der ganzen Zahlen enthält zusätzlich zur Menge der natürlichen Zahlen auch deren negative Gegenstücke −5,−4,−3,−2,−1, 0,1,2,3,4,5, usw. und wird mit dem Formelzeichen $\mathbb{Z}$ abgekürzt. Die Zahl 0 gehört immer dazu und ist weder positiv noch negativ.

$\mathbb{Z} = \{...-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5....\}$

Das Thermometer zeigt positive und negative Temperaturen – also ganze Zahlen.
In diesem Fall: –5 °C.

Rationale Zahlen

Die Menge der rationalen Zahlen enthält zur Menge der ganzen Zahlen auch alle Zahlen, die sich durch einen Bruch darstellen lassen. Dabei besteht sowohl der Nenner als auch der Zähler aus ganzen Zahlen, mit der Einschränkung, dass der Nenner nicht aus der Zahl 0 bestehen darf. Die Zahlenmenge wird mit dem Buchstaben $\mathbb{Q}$ abgekürzt.

$\mathbb{Q} = \{...\frac{-23}{3}, -4, -3, \frac{-1}{5}, 0, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{31}{7}....\}$

Ein Pizzastück ist $\frac{1}{8}$ der ganzen Pizza. Brüche gehören zu den rationalen Zahlen.

ZAHLENMENGEN

Volumen Messbecher
$V = \pi r^2 h$

Reelle Zahlen

Die Menge der reellen Zahlen enthält zur Menge der rationalen Zahlen alle Zahlen, die sich als unendlich lange Dezimalzahlen, aber nicht als Bruch darstellen lassen. Beispiele dafür sind: $-\sqrt{11}$, $\sqrt{5}$, π, usw. Die Zahlenmenge wird mit dem Buchstaben $\mathbb{R}$ abgekürzt.

$\mathbb{R} = \{\ldots, \frac{-23}{3}, -4, -\sqrt{11}, \frac{-1}{5}, 0, 1, \frac{3}{2}, \sqrt[3]{5}, 2, \pi, \frac{31}{7} \ldots\}$

Zahlenmengen können in aufzählender oder beschreibender Form angegeben werden.

Aufzählende Form: $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

Beschreibende Form: $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 8\}$

Den Ausdruck in der Klammer in der beschreibenden Form kann wie folgt sprachlich wiedergeben werden: „Menge aller natürlichen Zahlen, die kleiner als 8 sind“.

AUFGABEN

1 Markieren Sie mit dem Elementzeichen $\in$, in welcher Zahlenmenge die Zahl enthalten ist.

	$\frac{1}{3}$	-125	8π	$-24{,}33$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{81}$	6^3	$\sqrt{17}$
$\mathbb{N}$								
$\mathbb{Z}$								
$\mathbb{Q}$								
$\mathbb{R}$								

2 Geben Sie die Zahlenmenge in beschreibender Form an.

a) X ist eine ganze Zahl, die größer als -5 ist.

b) X ist eine reelle Zahl zwischen 2,5 und 10,5. Die Grenzen sind enthalten.

3 Geben Sie jeweils 4 Zahlen in aufzählender Form an, die zu der Zahlenmenge A gehören.

a) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 7{,}25\}$ b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{3} < x < 8\}$

2 Rechnen mit Termen

EINLEITUNG

Sowohl im Alltag, aber auch in der Mathematik spielen Terme eine bedeutende Rolle. Sie bilden das Grundgerüst für komplexere mathematische Elemente wie Gleichungen oder Funktionen und ermöglichen es, alltägliche Zusammenhänge mathematisch zu beschreiben.

Beispielsweise lassen sich die Gesamtkosten für eine Taxifahrt mithilfe eines Terms darstellen. Für eine Taxifahrt von 10 km und einem Preis von 2,95 € pro Kilometer lässt sich der Gesamtpreis mittels folgenden Terms berechnen: 2,95 €/km · 10 km = 29,50 €. Von Gleichungen unterscheiden sich Terme dadurch, dass sie kein „=" enthalten.

2.1 Begrifflichkeiten rund um Terme

Man unterscheidet verschiedene Arten von Termen:

Definition

Terme mit Zahlen: z. B. -2; $\sqrt{3}$; 3^4;…

Terme mit Variablen: z. B. a; x^3; $\sqrt{y}$;…

Terme bestehend aus einer Kombination von Zahlen, Rechenzeichen und Variablen: z. B. $-10 \cdot \frac{3}{8} \cdot x$; $(2+x) \cdot y$;…

Den **Wert des Terms** erhält man, indem man in einem Term mit Variablen für die jeweiligen Variablen eine Zahl einsetzt.

Beispiel: Berechne den Wert des Terms $2 \cdot x + 3 \cdot y$ für $x = 3$ und $y = 4$.

$2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 6 + 12 = 18$. Der **Wert des Terms** ist 18.

Für die Betrachtung von Termen ist es nötig, sich mit den Begrifflichkeiten der verschiedenen Grundrechenarten vertraut zu machen.

Definition

Addition:

Die Addition beschreibt die Vereinigung von zwei oder mehr Zahlen z. B. 3 + 5 = 8. Das mathematische Symbol ist das „+".

3 und 5, die Zahlen, die im Beispiel addiert werden, werden **Summanden** genannt.

8, das Ergebnis der Addition des Beispiels, wird **Summe** genannt.

Subtraktion:

Die Subtraktion von zwei Zahlen wird mathematisch durch das Symbol „–“ beschrieben. Beispielsweise beschreibt 8 – 5 = 3, dass von der Zahl 8 die Zahl 5 abgezogen wird.

Das Ergebnis 3 wird **Differenz** genannt.

Multiplikation:

Die Multiplikation wird mathematisch durch „·“ repräsentiert.

Beispiel: $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y = y^5$. Hierbei wird $y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$ **Produkt** genannt. y^5 wird **Potenz** genannt.

Division:

Division beschreibt das Teilen einer Zahl durch eine andere Zahl und wird durch „:“ repräsentiert. Z. B. 8 : 2 = 4.

Im Beispiel ist 8 der **Dividend,** 2 der **Divisor** und 4 der **Quotient.**

Ein Quotient lässt sich auch als Bruch schreiben: $\frac{8}{2} = 4$.

Wichtig: Es ist nicht möglich durch 0 zu teilen.

AUFGABEN

1 Berechnen Sie die Summe, Differenz, Produkt und Quotient. Ordnen Sie zudem jeweils die Fachbegriffe Summe, Differenz, Produkt und Quotient den Aufgaben zu.

a) 3 + 2,4 b) 3 · 3,5 c) 18 : 1,5 d) −17 – 3 e) −17 + 3

2 Schreiben Sie als Potenz und berechnen Sie den Wert des Terms für y = 3.

a) $y \cdot y$ b) $y \cdot y \cdot y$ c) $y \cdot y \cdot y \cdot y$

3 Stellen Sie einen Term auf, der nachfolgend beschrieben wird. Berechnen Sie anschließend.

a) Addieren Sie zur Zahl 2 die Zahl 3. Multiplizieren Sie das Ergebnis mit 3.

b) Zum Produkt aus 3 und 2,5 wird die Zahl 4 addiert.

c) Der Quotient aus 14 und 2 wird mit 3 multipliziert.

4 Berechnen Sie den Wert des Terms. Füllen Sie hierzu die nachfolgende Tabelle aus.

x	y	$0{,}5x + 2y$	$-2y^2 + x$	$-1{,}5y + 2x$	$(x + y) \cdot 2$	$-(x + y)$
2	−2					
1		0,5				
0	−3					
−0,5	1					
5	7					
−4	−5					

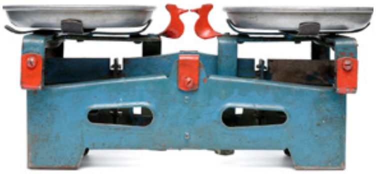
3 Gleichungen

EINLEITUNG

In der Mathematik ist eine Gleichung ein Ausdruck für zwei Terme T_1 und T_2 mit einem Gleichheitszeichen in der Mitte.

$T_1 = T_2$

Bestehen beide Terme T_1 und T_2 der Gleichung nur aus Zahlen, so kann die Gleichung entweder wahr (5 = 5) oder falsch (2 = 3) sein.



Enthält die Gleichung eine Variable, so hängt es von den für die Variable eingesetzten Zahlen ab, ob die Gleichung wahr oder falsch ist. Die Zahlenwerte, die zu einer wahren Aussage führen, heißen Lösungen oder Lösungsmenge der Gleichung. Zum Lösen der Gleichung wird sie mithilfe der vier Grundrechenarten Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division so umgeformt, bis die Variable auf einer Seite isoliert wurde. Diese Umformungen nennt man Äquivalenzumformungen, da sie die Lösung der Gleichung nicht verändern. Zum Umformen wählt man die Rechenart, die die Rechenart in der Gleichung umkehrt, so subtrahiert man, wenn im Term addiert wurde.

Bei einer Ungleichung steht zwischen den beiden Termen T1 und T2 anstelle des Gleichheitszeichens das größer als oder kleiner als Zeichen. Hier ist zu beachten, dass bei Multiplikation oder Division mit einer negativen Zahl das Ungleichheitszeichen umgedreht wird. Multipliziert man also die Ungleichung $-3 > -5$ mit dem Faktor -1 so wird daraus die Ungleichung $3 < 5$.

Bei Anwendungsaufgaben ist darauf zu achten, dass nicht jede Lösung der Gleichung sich auf die Sachsituation übertragen lässt. Soll beispielsweise in einer Aufgabe die Anzahl an Sitzen in einem Kinosaal bestimmt werden, so kann die Lösung nur aus der Menge der natürlichen Zahlen stammen, eine Bruchzahl als Lösung scheidet aus. Die Realität gibt somit vor, aus welcher Zahlenmenge die Lösung einer Gleichung stammen kann.

Folgende verschiedene Gleichungen werden behandelt:

Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Die unbekannte Variable ist nur in der ersten Potenz vorhanden.

Lineare Gleichungssysteme

Es sind mehrere Gleichungen mit mehr als einer unbekannten Variablen vorhanden.

Bruchgleichungen

Die unbekannte Variable ist im Nenner eines Bruchs enthalten.

Quadratische Gleichungen

Die unbekannte Variable ist in der zweiten Potenz vorhanden.

3.1 Lineare Gleichungen und Ungleichungen

Bei Aufgaben ohne konkreten Anwendungsbezug wird für die unbekannte Variable häufig x verwendet. Sie ist nur in der ersten Potenz vorhanden. Anstelle von x^1 wird nur x geschrieben.

BEISPIEL
Äquivalenzumformungen einer linearen Gleichung

Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $4(x-3)+5=x+2$

Lösung

Ausmultiplizieren der Klammer	$4(x-3)+5=x+2$	
Zusammenfassen der linken Seite	$4x-12+5=x+2$	
	$4x-7=x+2$	
Auf beiden Seiten 7 addieren	$4x-7=x+2$	$\mid +7$
Auf beiden Seiten x subtrahieren	$4x=x+9$	$\mid -x$
Auf beiden Seiten durch 3 teilen	$3x=9$	$\mid :3$
	$x=3$	

BEISPIEL
Äquivalenzumformungen einer linearen Ungleichung

Bestimmen Sie die Lösung der Ungleichung $-2(x-3)+11<7$

Lösung

Ausmultiplizieren der Klammer	$-2(x-3)+11<7$	
Zusammenfassen der linken Seite	$-2x+6+11<7$	
	$2x+17<7$	
Auf beiden Seiten 17 subtrahieren	$2x+17<7$	$\mid -17$
Auf beiden Seiten durch −2 teilen	$2x<-10$	$\mid :(-2)$
	$x>5$	

Lösungsmenge $L=\{x\in\mathbb{R}\mid x>5\}$

Bei der Division durch −2 hat sich das Ungleichheitszeichen umgekehrt. Die Lösungsmenge besteht aus allen reellen Zahlen, die größer als 5 sind.

GLEICHUNGEN

Definition

Beim Lösen von Gleichungen sollte man nach einem festen Schema vorgehen:

1. Klammern auflösen.
2. Jede Seite der Gleichung ordnen und zusammenfassen.
3. Umformen, bis die Unbekannte isoliert auf einer Seite steht.

Bei Anwendungsaufgaben ist es schwieriger, ein allgemeines Schema zu finden. Hier sind meistens individuelle Strategien gesucht. Eine systematische Vorgehensweise ist jedoch immer sinnvoll.

BEISPIEL
Anwendungsaufgabe

Ein Autofahrer tankt 42 Liter Benzin und kauft noch 1 Liter Motorenöl. Zusammen bezahlt er dafür 83,93 €. Das Motorenöl hat 12,90 € gekostet. Wie viel hat ein Liter Benzin gekostet?

Lösung

Als erstes wird die gesuchte Unbekannte festgelegt, in diesem Fall der Literpreis Benzin: x.

Aus den übrigen Angaben wird die Gleichung aufgestellt.

$42x + 12{,}90 = 83{,}93$

$$
\begin{aligned}
42x + 12{,}90 &= 83{,}93 && |-12{,}90\\
42x &= 70{,}98 && |:42\\
x &= 1{,}69
\end{aligned}
$$

Ein Liter Benzin kostet somit 1,69 €.

BEISPIEL
Altersrätsel

Drei Cousinen sind zusammen 64 Jahre alt. Die erste Cousine ist 6 Jahre älter als die zweite Cousine, die dritte Cousine ist 2 Jahre jünger als die zweite Cousine. Welches Alter haben die drei Cousinen?

Lösung

Zuerst wird die Unbekannte für das Alter einer Cousine festgelegt. Mit den bekannten Altersdifferenzen und dem Gesamtalter ergibt sich dann die zu lösende Gleichung.

Alter der zweiten Cousine:	x
Alter der ersten Cousine:	$x + 6$
Alter der dritten Cousine:	$x - 2$

4 Funktionen

EINLEITUNG

Der Begriff „Funktion“ wurde von verschiedenen Mathematikern wie Gottfried Leibnitz (1646–1716), Johann Bernoulli (1667–1748) oder Leonhard Euler (1703–1783) mit Beginn des 18. Jahrhunderts erstmalig verwendet. Damals bezog er sich auf die gesetzmäßige Abhängigkeit zweier Größen, deren grafsche Veranschaulichung zu einer zusammenhängenden Kurve ohne Knick führt. Diese Zusammenhänge lassen sich mathematisch durch Gleichungen, wie beispielsweise eine Geraden- oder Parabelgleichung, wiedergeben und in einem kartesischen Koordinatensystem grafisch darstellen.

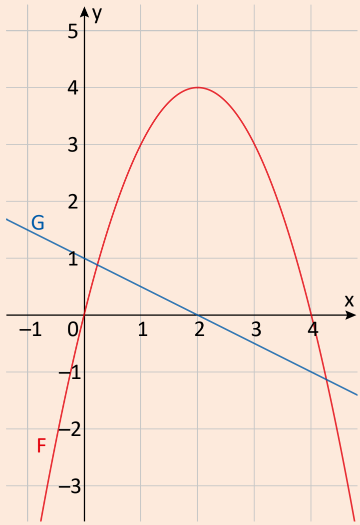


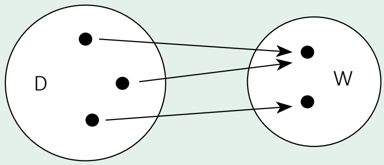
Abbildung 1
Gerade und Parabel

Allerdings gab es Probleme, diesen Funktionsbegriff auf Anwendungsaufgaben zu übertragen, die sich nur abschnittsweise durch eine Gleichung beschreiben lassen und deren Schaubilder Knicke oder sogar Sprünge aufweisen. Beispielsweise kann der Verlauf von Hochspannungsleitungen mathematisch durch Parabeln gut dargestellt werden, wobei eine Parabelgleichung immer nur einen Streckenabschnitt zwischen zwei Hochspannungsmasten beschreibt. An der Aufhängung der Leitung kommt es zu einem Knick, der eine neue Funktionsgleichung für den nächsten Abschnitt erforderlich macht. Der ursprüngliche Funktionsbegriff wurde somit erweitert und die Anforderung an die einheitliche Gesetzmäßigkeit der mathematischen Zuordnung aufgegeben. Mittlerweile wird eine Funktion als Vorschrift, die jedem Element einer Menge genau ein Element einer anderen Menge zuordnet, definiert. Dabei werden in der Definitionsmenge D alle x-Werte als unabhängige Variable zusammengefasst, auf die die Funktionsgleichung angewendet wird. In der daraus resultierenden Wertemenge W sind alle möglichen y-Werte enthalten. Es handelt sich um die abhängige Variable. Die Wertemenge ist immer kleiner oder gleich der Definitionsmenge.

4.1 Definition einer Funktion

Definition

Eine eindeutige Zuordnung, die jeder Zahl x aus der Definitionsmenge D genau eine Zahl y aus der Wertemenge W zuordnet, heißt Funktion.



BEISPIEL
einer Funktion

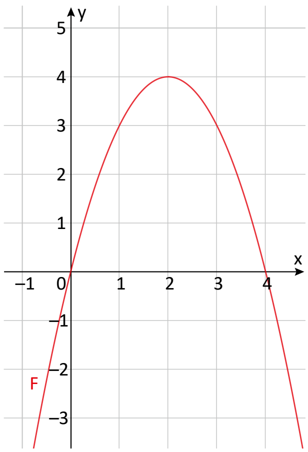


Abbildung 2
Parabel

Gleichung	$y = -(x-2)^2 + 4$
Definitionsmenge	$D = \mathbb{R}$
Wertemenge	$W =]-\infty;4]$

In die Gleichung kann jede beliebige reelle Zahl für x eingesetzt werden. Da die Parabel nach unten geöffnet ist, kann der y-Wert maximal den Wert 4 annehmen. Die Wertemenge ist beschränkt.

Anstelle der Gleichung $y = -(x-2)^2 + 4$, die das Schaubild beschreibt, wird bei Funktionen der Ausdruck $f(x) = -(x-2)^2$ verwendet. Jedem Wert x_0 wird damit der Funktionswert $f(x_0)$ zugeordnet. Der Punkt (1/3) liegt auf dem Schaubild der Funktion. Die Funktionsgleichung liefert $f(1) = 3$.

Die Summe aller Punkte P(x/y) mit $y = f(x)$ bilden den Funktionsgraphen.

Bei Anwendungsaufgaben kann anstelle der unabhängigen Variablen x auch ein anderer Buchstabe verwendet werden, wenn dieser beispielsweise durch seine physikalische Verwendung geläufiger ist. Mit der gleichen Begründung kann auch für den Funktionswert f(x) ein abweichender Buchstabe benutzt werden.

In der Physik wird für die Zeit der Buchstabe t, für die Geschwindigkeit der Buchstabe v und für eine Strecke der Buchstabe s als Formelzeichen verwendet. Wird nun mithilfe einer Funktionsgleichung die zurückgelegte Wegstrecke eines Fahrzeugs s in Abhängigkeit von der Zeit t bei konstanter Geschwindigkeit v beschrieben, so kann die Funktionsgleichung auch wie folgt lauten: $s(t) = vt$.

Üblicherweise wird dann auch für die unabhängige Variable und den Funktionswert die physikalische Maßeinheit angegeben, hier beispielsweise: t in Minuten und s in Metern.

BEISPIEL
Physikalische Anwendung

Das Volumen eines zylindrischen Messbechers berechnet sich durch $V = \pi r^2 h$, mit r als Radius und h als Höhe des Messbechers. Da der Radius bei einem zylindrischen Gefäß gleich bleibt und die Kreiszahl π eine Konstante ist, hängt das Volumen linear von der Höhe ab. Dem variablen Füllstand x kann somit immer eindeutig ein bestimmtes Volumen zugeordnet werden. Wird nun der Messbecher gefüllt, lässt sich das Volumen direkt ablesen.

Das Ganze lässt sich mathematisch mit einer Funktionsgleichung beschreiben:

$V(x) = \pi r^2 x$ mit x in cm und V(x) in ml

Im gegebenen Beispiel hat der Messbecher eine Höhe von 10 cm und einen Durchmesser von 2 cm.

a) Bestimmen Sie die Definitions- und Wertemenge.

b) Berechnen Sie das Volumen, wenn der Messbecher zur Hälfte gefüllt ist.

c) Zeichnen Sie das zugehörige Schaubild mithilfe einer Wertetabelle.

Lösung

a) Der Boden und die Höhe des Messbechers begrenzen die Definitionsmenge D = [0;10].

Die Grenzen der Definitionsmenge geben die Grenzen der Wertemenge vor, V(0) = 0 ml und V(10) ≈ 125 ml, damit gilt W = [0;125].

b) Wenn der Messbecher zur Hälfte gefüllt ist, gilt x = 5 cm. V(5) ≈ 63 ml.

c) Wertetabelle

x in cm	0	3	5	10
f(x) in ml	0	38	63	125

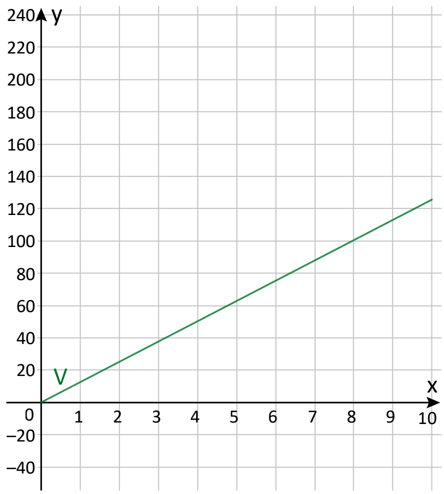


Abbildung 3
Volumen abhängig von Füllhöhe

5 Modellierungskreislauf und Anwendungsaufgaben

Beim mathematischen Modellieren wird eine Fragestellung der realen Welt in die Sprache der Mathematik übersetzt und anschließend mit mathematischen Werkzeugen gelöst. Das Ergebnis wird in der realen Welt interpretiert und anhand der Fragestellung bewertet.

Übersetzen

Reale Welt

Die Blackfriars Bridge überspannt die Themse in London. Ein Brückenbogen für die Schiffsdurchfahrt hat eine Spannweite von 48 m und eine maximale Höhe von 8 m. Kann ein Schiff, das 10 m breit und an der Seite 7,5 m hoch ist, darunter hindurchfahren?

Mathematisches Modell

Wird die x-Achse auf Höhe des Flusspegels und die y-Achse in die Mitte des Brückenbogens gelegt, so lässt sich der Brückenbogen durch die Parabelgleichung $y = a \cdot x^2 + c$ beschreiben. Mit $c = 8$ und der Nullstelle bei $x = 24$ kann a bestimmt werden:
$0 = a \cdot 24^2 + 8$

$$a = -\frac{8}{24^2} = -\frac{1}{72}$$

Parabelgleichung des Brückenbogens

$$y = -\frac{1}{72}x^2 + 8$$

Lösen

Mathematische Lösung

Das Schiff benötigt von der Mitte des Brückenbogens nach beiden Seiten 5 m. Setzt man $x = 5$ in die Parabelgleichung ein, erhält man die zugehörige Höhe des Brückenbogens.

$$y = -\frac{1}{72}5^2 + 8 = 7{,}65$$

Interpretieren

Reale Lösung

Wenn das Schiff exakt mittig unter dem Brückenbogen hindurchfährt, hat der Brückenbogen am äußersten Rand des Schiffes eine Höhe von 7,65 m. Zum Schiff mit seiner Höhe von 7,5 m bleibt somit noch ein Abstand von 15 cm.

Bewerten

Beim Übersetzen der realen Aufgabenstellung in ein mathematisches Modell und anschließendem Lösen können die in den vorangegangenen Kapiteln Gleichungen sowie Funktionen vorgestellten mathematischen Modelle und Lösungswege genützt werden.

MODELLIERUNGSKREISLAUF UND ANWENDUNGSAUFGABEN

Grundsätzlich geben mathematische Modelle die Wirklichkeit selten exakt wieder. Daher ist es wichtig, die mathematische Lösung im Sachzusammenhang zu interpretieren und anhand der Fragestellung zu bewerten. Gegebenenfalls gilt es, das mathematische Modell anzupassen.

AUFGABEN

1 Ein Fußgängertunnel hat am Boden eine Breite von 2,4 m und eine maximale Höhe von 2,8 m.

a) Wie weit darf die elektrische Beleuchtung von der Tunnelmitte hängen, wenn bei einer 1,92 m großen Person noch ein Sicherheitsabstand von 35 cm bestehen soll?

b) Zu Ausbesserungsarbeiten soll der Tunnel mit einem Bagger befahren werden. Wie hoch darf ein 1,8 m breiter Bagger maximal sein?

2 Eine Stromtrasse führt über eine landwirtschaftliche Nutzfläche. Zwei Strommasten sind voneinander 200 m entfernt, die Stromleitungen sind in einer Höhe von 20 m befestigt. In der Mitte zwischen 2 Strommasten hat die Leitung noch einen Abstand von 15 m zum Boden.

a) Beschreiben Sie den Verlauf der Stromleitung mit einer geeigneten Parabelgleichung.

b) In welcher Höhe befindet sich die Stromleitung, wenn man 30 m vom Mast entfernt steht?

3 Das Unternehmen Radmann baut Fahrradanhänger. Die variablen Kosten pro Anhänger betragen dabei 180 €. Es fallen zusätzlich Fixkosten von 3 600 € an. Ein Fahrradanhänger wird über den Onlinehandel für 300 € verkauft.

a) Bestimmen Sie die Anzahl an Fahrradanhängern, die das Unternehmen verkaufen muss, um einen Gewinn zu erzielen.

b) Das Unternehmen möchte ab 25 verkauften Fahrradanhängern bereits einen Gewinn erzielen. Wie muss dann der Verkaufspreis geändert werden?

4 Drei Geschwister sind zusammen 50 Jahre alt, der Sohn ist doppelt so alt wie seine jüngere Schwester. Die ältere Schwester ist 14 Jahre vor der jüngeren Schwester geboren. Wie alt sind die Geschwister?

5 An einer Kinokasse zahlt eine Mutter mit ihren beiden Kindern zusammen 28 € Eintritt. Ein Ehepaar mit 3 Kindern zahlt zusammen 48 €.

a) Wie viel kostet der Eintritt für einen Erwachsenen und für ein Kind?

b) Das Kino möchte eine Familienkarte einführen. Wie viel darf diese kosten, wenn 2 Erwachsene mit 2 Kindern 10 € gegenüber dem regulären Eintrittspreis sparen sollen?

6 In einem Gewächshaus wird die Temperatur an einem Tag im März über einen Zeitraum von 24 Stunden aufgezeichnet. Abbildung 1 zeigt die gemessene Temperatur T in Abhängigkeit von der Zeit, gemessen in Stunden, beginnend um Mitternacht. Das Schaubild setzt sich aus zwei Parabelstücken zusammen.

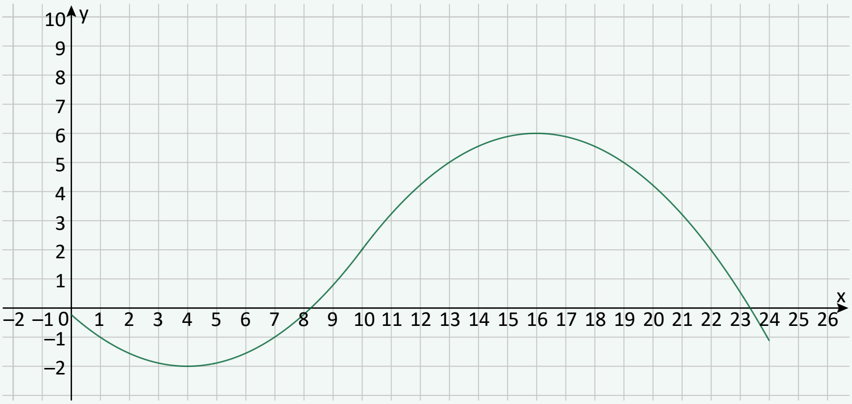


Abbildung 1: Temperaturverlauf

a) Modellieren Sie den Temperaturverlauf von 0 bis 10 Uhr durch eine quadratische Funktion.

b) Sinkt die Temperatur für einen Zeitraum von länger als 8 Stunden unter −0,5 °C, ist das Keimen der Setzlinge gefährdet. Prüfen Sie, ob dies zutrifft.

7 Bei einem Wasserspiel tritt der Wasserstrahl parabelförmig aus dem Boden aus und hat nach 2 m Entfernung die maximale Höhe von 2 m erreicht.

a) Bestimmen Sie eine Parabelgleichung, die den Verlauf des Wasserstrahls beschreibt.

b) Skizzieren Sie die Parabel in ein geeignetes Koordinatensystem.

c) Wie nah kann sich ein Kind, das 1,28 m groß ist, unter dem Wasserstrahl der Austrittsstelle annähern, ohne vom Strahl getroffen zu werden?

8 Als Simon geboren wurde, war seine Mutter 26 Jahre alt und sein Vater 28 Jahre alt. Heute ist Simon doppelt so alt wie seine beiden Zwillingsschwestern. Die gesamte Familie ist zusammen 102 Jahre alt. Bestimmen Sie das Alter aller Familienmitglieder.

Lösungen zu Kapitel 1 Zahlenmengen

Seite 10

1

	$\frac{1}{3}$	-125	8π	$-24{,}33$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{81}$	6^3	$\sqrt{17}$
$\mathbb{N}$						$\in$	$\in$	
$\mathbb{Z}$		$\in$				$\in$	$\in$	
$\mathbb{Q}$	$\in$	$\in$		$\in$		$\in$	$\in$	
$\mathbb{R}$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$	$\in$

2 a) $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid -5 < x\}$

b) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 2{,}5 \leq x \leq 10{,}5\}$

3 a) $A = \{8, 9, \frac{19}{2}, 10, \frac{37}{3}, 20\}$

b) $B = \{\sqrt{5}, 3, \frac{10}{3}, 7\}$

Die angegebenen Zahlen der beiden Lösungsmengen sind nur exemplarisch.

Lösungen zu Kapitel 2 Rechnen mit Termen

2.1 Begrifflichkeiten rund um Terme

Seite 12

1 a) 5,4 (Summe) b) 10,5 (Produkt) c) 12 (Quotient) d) −20 (Differenz) e) −14 (Summe)

2 a) y^2 $3^2 = 9$ b) y^3 $3^3 = 27$ c) y^4 $3^4 = 81$

3 a) $(2 + 3) \cdot 3 = 18$

b) $3 \cdot 2,5 + 4 = 11,5$

c) $\frac{14}{2} \cdot 3 = 21$

4

x	y	$0,5x + 2y$	$-2y^2 + x$	$-1,5y + 2x$	$(x + y) \cdot 2$	$-(x + y)$
2	−2	−3	−6	7	0	0
1	0	0,5	1	2	2	−1
0	−3	−6	−18	4,5	−6	3
−0,5	1	1,75	−2,5	−2,5	1	−0,5
5	7	16,5	−93	−0,5	24	−12
−4	−5	−12	−54	−0,5	−18	9

2.2 Rechnen mit Brüchen

Seite 14

1 a) $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ b) $\frac{25}{5} = \frac{5}{1} = 5$ c) $\frac{21}{42} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ e) $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

2 a) $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$ b) $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ c) $\frac{2}{10} = \frac{6}{30}$

3 a) $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ c) $\frac{20}{40} = \frac{1}{2}$ d) $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$ e) $\frac{7}{8}$ f) $\frac{21}{24} = \frac{7}{8}$

Gleichwertig sind: a) und c), b) und d) und e) und f)

Seite 15

1 a) $\frac{1}{3} + \frac{4}{3} = \frac{5}{3}$ b) $\frac{1}{3} + 2 = \frac{1}{3} + \frac{6}{3} = \frac{7}{3}$ c) $\frac{3}{5} + \frac{4}{10} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1$

d) $\frac{1}{12} + \frac{3}{36} = \frac{3}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ e) $\frac{2}{4} + \frac{1}{5} = \frac{10}{20} + \frac{4}{20} = \frac{14}{20}$

2 a) $\frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ b) $\frac{4}{5} - \frac{3}{20} = \frac{16}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20}$ c) $\frac{1}{7} - \frac{2}{21} = \frac{3}{21} - \frac{2}{21} = \frac{1}{21}$

d) $\frac{4}{12} - \frac{3}{4} = \frac{4}{12} - \frac{9}{12} = \frac{-5}{12}$ e) $\frac{2}{4} - 3 = \frac{1}{2} - \frac{6}{2} = -\frac{5}{2}$

3 a) $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{2} = \frac{30}{12} = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$ b) $\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{20} = \frac{1 \cdot 3}{5 \cdot 5} = \frac{3}{25}$ c) $\frac{1}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{14}$

d) $\frac{4}{12} \cdot 2 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ e) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{7} = \frac{6}{21}$

4 a) $\frac{5}{6} : \frac{6}{2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ b) $\frac{4}{5} : \frac{3}{20} = \frac{16}{3}$ c) $\frac{1}{7} : \frac{3}{2} = \frac{2}{21}$

d) $\frac{4}{12} : 2 = \frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ e) $\frac{2}{3} : \frac{3}{7} = \frac{14}{9}$

5 a) $\frac{5}{6} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} + \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$

Zuerst die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, dann die Zähler addieren und den Nenner beibehalten.

b) $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Zuerst die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner bringen, dann die Zähler subtrahieren und den Nenner beibehalten. Anschließend kürzen.

c) $\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$

Zuerst die 2 mit der 6 Kürzen. Danach die Zähler multiplizieren und die Nenner multiplizieren.

d) $\frac{5}{6} : \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{1} = \frac{5}{2}$

Zuerst als Produkt mit dem Kehrbruch schreiben und kürzen. Dann Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplizieren.

2.3 Terme mit Variablen

Seite 16 – 17

1 a) 15 € + x · 0,39 €/kwh

b) 15 € + 220 kwh · 0,39 €/kwh = 100,80 €

c) 15 € + 180 kwh · 0,39 €/kwh = 85,20 €

d) 12 € + 180 kwh · 0,39 €/kwh = 82,20 €

2 a) 7 : z + 0,6

b) (z − 3) · 2

c) z + 2 − 0,5